LXXXVI Московская математическая олимпиада

12 марта 2023 года • 9 класс

Задача 1. Саша записывает числа 1, 2, 3, 4, 5 в каком-нибудь порядке, расставляет знаки арифметических операций «+», «−», «×» и скобки и смотрит на результат полученного выражения. Например, он может получить число 8 с помощью выражения $(4-3)\times(2+5)+1$. Может ли он получить число 123?

Формировать числа из нескольких других нельзя (например, из чисел 1 и 2 нельзя составить число 12).

Задача 2. Даны две последовательности из букв А и Б, в каждой из которых по 100 букв. За одну операцию разрешается вставить в какое-то место последовательности (возможно, в начало или в конец) одну или несколько одинаковых букв или убрать из последовательности одну или несколько подряд идущих одинаковых букв. Докажите, что из первой последовательности можно получить вторую не более чем за 100 операций.

Задача 3. Периметр треугольника ABC равен 1. Окружность ω касается стороны BC, продолжения стороны AB в точке P и продолжения стороны AC в точке Q. Прямая, проходящая через середины AB и AC, пересекает описанную окружность треугольника APQ в точках X и Y. Найдите длину отрезка XY.

Задача 4. Дано натуральное число $n>1$. Назовём положительную обыкновенную дробь (не обязательно несократимую) *хорошей*, если сумма её числителя и знаменателя равна n. Докажите, что любую положительную обыкновенную дробь, знаменатель которой меньше n, можно выразить через хорошие дроби (не обязательно различные) с помощью операций сложения и вычитания тогда и только тогда, когда n — простое число.

Напомним, что обыкновенная дробь — это отношение целого числа к натуральному.

Задача 5. Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.

Задача 6. Назовём тройку чисел *триплетом*, если одно из них равно среднему арифметическому двух других. Последовательность (a_n) строится следующим образом: $a_0=0$, $a_1=1$ и при $n>1$ число a_n — такое минимальное натуральное число, большее a_{n-1}, что среди чисел a_0, a_1, ..., a_n нет трёх, образующих триплет. Докажите, что $a_{2023}\leqslant 100\,000$.

XX устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 16 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXVI Московской математической олимпиады —
на сайте `mmo.mccme.ru`